Coordonator
GHEORGHE BOROICA

Nicolae Muşuroia

Gheorghe Boroica

MATEMATICĂ DE EXCELENŢĂ

pentru concursuri, olimpiade şi centre de excelenţă

Clasa a XII-a

Volumul II. Analiză matematică

ÎNVĂȚARE DE EXCELENȚĂ®
supersucces

PARALELA 45
EDITURA

CUPRINS

CAPITOLUL 1. FUNCŢII PRIMITIVABILE

Conceptul de primitivă a apărut în ştiinţă din nevoia de a cerceta comportarea globală a fenomenelor naturale descrise de unele funcţii având variaţie locală cunoscută.

Problemele concrete de fizică, chimie, biologie, geometrie – mai ales acelea care admit o modelare diferenţială – au impulsionat conturarea treptată a noţiunii de primitivă şi de integrală definită.

1.1. Definiţie. Fie $J \subset \mathbb{R}$ un interval neredus la un singur punct (J e interval nedegenerat). O funcţie $F : J \to \mathbb{R}$ se numeşte *primitivă* pe J a unei funcţii $f : J \to \mathbb{R}$ dacă F este derivabilă pe J şi $F'(x) = f(x)$ pentru orice $x \in J$. Când punctul x din această definiţie este o extremitate a lui J, prin $F'(x)$ se notează derivata laterală a lui F în punctul x.

Se spune că o funcţie $f : J \to \mathbb{R}$ admite primitive pe J (f este primitivabilă pe J sau f este o derivată) dacă există o primitivă a lui f pe J.

Noţiunea de primitivă a fost introdusă de I. Newton (1665) sub denumirea de *fluentă*.

1.2. Observaţie. Notăm în continuare cu $P(J)$ mulţimea tuturor funcţiilor primitivabile pe J, cu $C(J)$ mulţimea tuturor funcţiilor continue pe J şi cu $\mathcal{D}_a(J)$ mulţimea tuturor funcţiilor ce au proprietatea lui Darboux pe J, J fiind un interval nedegenerat din $\mathbb{R}$.

Notăm în continuare cu J un interval nedegenerat din $\mathbb{R}$.

1.3. Propoziţie. Dacă funcţia $f : J \to \mathbb{R}$ admite o primitivă F pe J, atunci restricţia lui F la orice interval nedegenerat $I \subset J$ este o primitivă a restricţiei lui f la I.

1.4. Propoziţie. Dacă F şi G sunt două primitive ale aceleiaşi funcţii $f : J \to \mathbb{R}$, atunci există $k \in \mathbb{R}$ astfel încât

$$F(x) - G(x) = k,\ \forall\, x \in J.$$

1.5. Teoremă. Dacă funcţia f este continuă pe intervalul nedegenerat J, atunci f are primitive pe J.

1.6. Observaţie. Din teorema anterioară rezultă că $C(J) \subset P(J)$. Facem precizarea că relaţia $P(J) \subset C(J)$ nu este în general adevărată, după cum se va putea observa din exemplul următor. Teorema anterioară se mai numeşte şi teorema fundamentală a calculului diferenţial şi integral.

1.7. Exemplu. Funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}\sin\left(\dfrac{\alpha}{x}\right), & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$, unde $\alpha\in\mathbb{R}$, are primitive pe $\mathbb{R}$.

Demonstraţie: Pentru $\alpha=0$, funcţia f este funcţie nulă, deci f e continuă şi atunci f are primitive pe $\mathbb{R}$.

Pentru $\alpha\neq 0$, funcţia f e continuă pe $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ şi în $x=0$ are un punct de discontinuitate de speţa a doua. Integrând prin părţi pe orice interval ce nu conţine originea, obţinem:

$$\int\sin\left(\frac{\alpha}{x}\right)dx=\int\left(\cos\left(\frac{\alpha}{x}\right)\right)'\cdot\frac{x^2}{\alpha}dx=\frac{x^2}{\alpha}\cdot\cos\frac{\alpha}{x}-\int\frac{2x}{\alpha}\cdot\cos\frac{\alpha}{x}dx. \qquad (1)$$

Aceasta ne sugerează considerarea funcţiei $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=\begin{cases}\dfrac{2x}{\alpha}\cdot\cos\dfrac{\alpha}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$.

Funcţia g fiind continuă pe $\mathbb{R}$, va exista G o primitivă pentru g. Folosind (1), deducem că o primitivă F pentru f va trebui să fie de forma $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,

$$F(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2}{\alpha}\cdot\cos\dfrac{\alpha}{x}-G(x)+c_1, & x\neq 0\\ c_2, & x=0\end{cases}.$$

Din construcţia lui F avem că F e derivabilă pe $\mathbb{R}^*$ şi $F'(x)=f(x)$, $\forall\, x\in\mathbb{R}^*$. Din condiţia de continuitate a lui F în punctul $x=0$ obţinem că

$$F(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2}{\alpha}\cdot\cos\dfrac{\alpha}{x}-G(x)+c_1, & x\neq 0\\ -G(0)+c_1, & x=0\end{cases}. \qquad (2)$$

Atunci $F'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{F(x)-F(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{x}{\alpha}\cdot\cos\dfrac{\alpha}{x}-\dfrac{G(x)-G(0)}{x-0}\right)=0-G'(0)=-g(0)=$ $=0=f(0)$, deci F e derivabilă şi în $x=0$ şi $F'(0)=f(0)$. Aşadar, funcţia F dată de relaţia (2) este o primitivă pentru f. Atunci, pentru $\alpha\neq 0$, funcţia f este discontinuă şi are primitive pe $\mathbb{R}$.

1.8. Teoremă (Darboux, 1875). Dacă funcţia $f:J\to\mathbb{R}$ este derivabilă pe J, atunci derivata sa f' are proprietatea lui Darboux pe J.

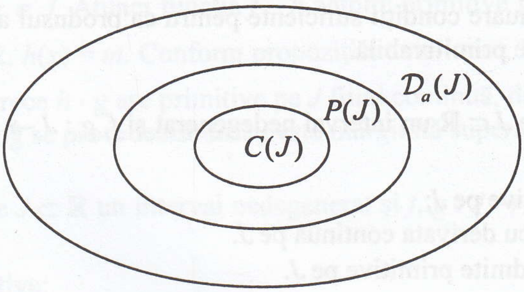
1.9. Propoziţie (condiţie necesară de existenţă a primitivelor)
Dacă funcţia $f:J\to\mathbb{R}$ are primitive pe J, atunci f are proprietatea lui Darboux pe J.
Avem deci incluziunea $P(J)\subset\mathcal{D}_a(J)$.

Demonstrație: Din ipoteză rezultă că există F o primitivă pentru f. Atunci din teorema lui Darboux rezultă că F' are proprietatea lui Darboux, deci f are proprietatea lui Darboux pe J.

1.10. Observație. Reciproca proprietății anterioare nu este în general adevărată, adică $\mathcal{D}_a(J) \not\subset P(J)$. Acest lucru rezultă din următorul exemplu:

Funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} \sin\left(\dfrac{1}{x}\right), & x \neq 0 \\ a, & x = 0 \end{cases}$, are proprietatea lui Darboux pentru $a \in [-1, 1]$ și are primitive pe $\mathbb{R}$ doar pentru $a = 0$.

Din cele spuse anterior rezultă că avem următoarea diagramă:



Așadar, $C(J) \subset P(J) \subset \mathcal{D}_a(J)$, incluziunile fiind stricte.

1.11. Consecință. Fie $J \subset \mathbb{R}$ un interval nedegenerat și $f : J \to \mathbb{R}$ o funcție. Atunci avem:
1) Dacă f nu are proprietatea lui Darboux pe J, atunci f nu are primitive pe J.
2) Dacă $\operatorname{Im} f$ nu este interval, atunci f nu are primitive pe J.
3) Dacă f are un punct de discontinuitate de prima speță, atunci funcția f nu are primitive pe J.

1.12. Exemplu. Funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x}, & x \neq 0 \\ 2, & x = 0 \end{cases}$, nu are primitive pe $\mathbb{R}$.

Soluție: Avem că f este continuă pe $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ și $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 1 \neq f(0) = 2$, deci $x = 0$ este punct de discontinuitate de prima speță și atunci f nu are primitive pe $\mathbb{R}$.

1.13. Exemplu. Funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = [x]$ nu are primitive pe $\mathbb{R}$, deoarece $\mathbb{R}$ e interval și $\operatorname{Im} f = f(\mathbb{R}) = \mathbb{Z}$ nu este interval.

1.14. Propoziție. Dacă funcțiile $f, g : J \to \mathbb{R}$ au primitive pe J și $\lambda \in \mathbb{R}$, atunci și funcțiile $f + g$, $\lambda \cdot f$, $f - g$ au primitive pe J.

Demonstrație: Într-adevăr, dacă F, $G : J \to \mathbb{R}$ sunt primitive pentru f, respectiv g, atunci funcțiile $F + G$, $\lambda \cdot F$ și $F - G$ sunt primitive pentru $f + g$, $\lambda \cdot f$, respectiv $f - g$.

CONDIȚII SUFICIENTE CA UN PRODUS DE DOUĂ FUNCȚII PRIMITIVABILE SĂ FIE TOT O FUNCȚIE PRIMITIVABILĂ

Produsul a două funcții primitivabile nu este în general o funcție primitivabilă. Pentru aceasta se poate consulta problema 1A.6.

Vom da în continuare condiții suficiente pentru ca produsul a două funcții primitivabile să fie o funcție primitivabilă.

1.15. Propoziție. Fie $J \subset \mathbb{R}$ un interval nedegenerat și $f, g : J \to \mathbb{R}$ două funcții având proprietățile:

1) f admite primitive pe J;

2) g e derivabilă cu derivata continuă pe J.

Atunci funcția $f \cdot g$ admite primitive pe J.

Demonstrație: Fie F o primitivă pe J și funcția $u : J \to \mathbb{R}$, $u(x) = g(x) \cdot F(x)$. Atunci u e derivabilă pe J și $u'(x) = g'(x) \cdot F(x) + g(x) \cdot f(x)$. Atunci $f \cdot g = u' - g' \cdot F$ are primitive pe J, fiind o diferență de două funcții primitivabile (prima are primitivă pe u, iar a doua are primitive, fiind continuă).

1.16. Propoziție. Fie $J \subset \mathbb{R}$ un interval nedegenerat și $f, g : J \to \mathbb{R}$ două funcții având proprietățile:

1) f are primitive pe J;

2) $f(x) \neq 0$ pentru orice $x \in J$;

3) g e continuă pe J.

Atunci funcția $f \cdot g$ are primitive pe J.

Demonstrație: Fie $F : J \to \mathbb{R}$ o primitivă pentru f. Din $F'(x) = f(x) \neq 0$, $\forall\, x \in J$, rezultă că F' are semn constant pe J, deci F e strict monotonă. Considerăm funcția $H : J \to F(J)$, dată prin $H(x) = F(x)$, $\forall\, x \in J$. Funcția H astfel definită este derivabilă, surjectivă, injectivă (H este strict monotonă) și $H'(x) = F'(x) \neq 0$, $\forall\, x \in J$. Rezultă atunci că funcția inversă $H^{-1} : F(J) \to J$ este derivabilă.

Funcția $g \circ H^{-1} : F(J) \to \mathbb{R}$ are primitive, fiind continuă. Fie atunci $G : F(J) \to \mathbb{R}$ o primitivă a funcției $g \circ H^{-1}$. Atunci funcția $G \circ H : J \to \mathbb{R}$ e derivabilă pe J (compunere

de funcţii derivabile) şi $(G \circ H)'(x) = G'(H(x)) \cdot H'(x) = (g \circ H^{-1})(H(x)) \cdot H'(x) =$
$= g(x) \cdot f(x), \forall x \in J$. Aşadar, funcţia $G \circ H$ este o primitivă pentru funcţia $f \cdot g$.

1.17. Teoremă (W. Wilkosz). Fie $J \subset \mathbb{R}$ un interval nedegenerat şi $f, g : J \to \mathbb{R}$ două funcţii având proprietăţile:

1) f admite primitive pe J;
2) f mărginită superior sau inferior;
3) g e continuă.

Atunci funcţia $f \cdot g$ admite primitive pe J.

Demonstraţie: Presupunem că f este mărginită inferior. Atunci există $m \in \mathbb{R}$ astfel încât $f(x) > m, \forall x \in J$. Atunci funcţia $f - h$ admite primitive pe J şi nu se anulează pe J, unde $h : J \to \mathbb{R}, h(x) = m$. Conform propoziţiei anterioare, funcţia $(f - h) \cdot g$ are primitive pe J. Deoarece $h \cdot g$ are primitive pe J fiind continuă, deducem că şi $f \cdot g$ are primitive pe J. Analog se procedează dacă f este mărginită superior.

1.18. Propoziţie. Fie $J \subset \mathbb{R}$ un interval nedegenerat şi $f, g : J \to \mathbb{R}$ două funcţii având proprietăţile:

1) f admite primitive;
2) g e derivabilă şi cu derivata mărginită.

Atunci funcţia $f \cdot g$ admite primitive pe J.

Demonstraţie: Fie F o primitivă pentru f. Atunci funcţia $F \cdot g$ este derivabilă şi $(F \cdot g)' = f \cdot g + F \cdot g'$, deci $f \cdot g = (F \cdot g)' - F \cdot g'$. Cum funcţia g' are primitive şi e mărginită, iar F e continuă, din teorema lui Wilkosz deducem că funcţia $F \cdot g'$ are primitive şi atunci $f \cdot g$ are primitive (diferenţă de două funcţii primitivabile).

1.19. Exemplu. Arătaţi că funcţia $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $h(x) = \begin{cases} \ln(x^2+4) \cdot \sin\left(\dfrac{1}{x}\right), & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ are primitive pe $\mathbb{R}$.

Soluţie: Fie funcţiile $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} \sin\dfrac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$, $g(x) = \ln(x^2 + 4)$. Deoarece f are primitive şi g e derivabilă cu derivata continuă pe $\mathbb{R}$, deducem că funcţia $h = f \cdot g$ are primitive pe $\mathbb{R}$.

1.20. Exemplu. Fie $a \in \mathbb{R}$ și funcția $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $h(x) = \begin{cases} |x - a^2| \cdot \sin\frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$. Atunci rezultă că h are primitive pe $\mathbb{R}$.

Soluție: Fie funcțiile $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} \sin\frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ și $g(x) = |x - a^2|$. Cum f are primitive și e mărginită, iar g e continuă, din teorema lui Wilkosz rezultă că funcția $h = f \cdot g$ are primitive pe $\mathbb{R}$.

1.21. Teoremă (Teorema lui Jarnik). Fie $J \subseteq \mathbb{R}$ un interval nedegenerat și $f, g : J \to \mathbb{R}$ două funcții având proprietățile:

1) f, g primitivabile pe J;
2) $g(x) \neq 0$ pentru orice $x \in J$.

Atunci funcția $\frac{f}{g}$ are proprietatea lui Darboux pe J.

Demonstrație: Considerăm funcția $h = \frac{f}{g}$ și a, b două elemente din J cu $h(a) \neq h(b)$, iar λ un număr real situat între $h(a)$ și $h(b)$. Putem presupune că $h(a) < \lambda < h(b)$ (1). Din faptul că g e primitivabilă rezultă că g are proprietatea lui Darboux pe J. Cum $0 \notin \operatorname{Im} g$, deducem că g păstrează semn constant pe J, deci $g(a) \cdot g(b) > 0$. Dacă $g(a) > 0$ și $g(b) > 0$, atunci din relația (1) obținem:

$$f(a) - \lambda \cdot g(a) < 0 < f(b) - \lambda \cdot g(b).$$

Cum funcția $f - \lambda \cdot g$ are primitive pe J, rezultă că ea are proprietatea lui Darboux pe J, de unde deducem că există c situat între a și b astfel încât $f(c) - \lambda \cdot g(c) = 0 \Leftrightarrow h(c) = \lambda$. Dacă $g(a) < 0$ și $g(b) < 0$, atunci se procedează în mod analog. Așadar, funcția $h = \frac{f}{g}$ are proprietatea lui Darboux pe J.

1.22. Observație. Există funcții primitivabile al căror cât nu este o funcție primitivabilă. Se poate arăta că funcția $g : [-1, 1] \to \mathbb{R}$, $g(0) = \frac{1}{2}$, iar pentru $x \neq 0$ graficul lui g este format din părți egale de triunghiuri isoscele de înălțime egală cu 1 construite pe segmentele $\left[\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right]$, $\left[-\frac{1}{n}, -\frac{1}{n+1}\right]$, $n \in \mathbb{N}^*$, are primitive pe $[-1, 1]$. Pe de altă parte, pentru $a > 0$, funcția $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} \dfrac{a}{a+g(x)}, & x \in [-1, 1] \setminus \{0\} \\ \dfrac{2a}{a+1}, & x = 0 \end{cases}$, unde g este funcția anterioară, este câtul a două funcții primitivabile, dar f nu este o funcție primitivabilă.

1.23. Exemple. Funcțiile $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definite prin

$$f(x) = \begin{cases} 8 + \sin^3\left(\dfrac{1}{x}\right), & x \neq 0 \\ 8, & x = 0 \end{cases}, \quad g(x) = \begin{cases} 2 + \sin\left(\dfrac{1}{x}\right), & x \neq 0 \\ 2, & x = 0 \end{cases}$$

sunt primitivabile pe $\mathbb{R}$, iar câtul lor $\dfrac{f}{g}$ nu are primitive pe $\mathbb{R}$.

Soluție: Avem $\sin^3 a = \sin^2 a \cdot \sin a = \dfrac{1}{2}(1 - \cos 2a) \cdot \sin a = \dfrac{1}{2} \cdot \sin a - \dfrac{1}{4}(\sin 3a - \sin a) =$ $= \dfrac{3}{4} \cdot \sin a - \dfrac{1}{4} \sin 3a$. Atunci

$$f(x) = \begin{cases} 8 + \dfrac{3}{4}\sin\left(\dfrac{1}{x}\right) - \dfrac{1}{4}\sin\left(\dfrac{3}{x}\right), & x \neq 0 \\ 8, & x = 0 \end{cases} = h_1(x) + \frac{3}{4}h_2(x) - \frac{1}{4}h_3(x),$$

unde $h_1, h_2, h_3 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $h_1(x) = 8$, $h_2(x) = \begin{cases} \sin\left(\dfrac{1}{x}\right), & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ $h_3(x) = \begin{cases} \sin\left(\dfrac{3}{x}\right), & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$.

Cum h_1, h_2, h_3 au primitive pe $\mathbb{R}$, va rezulta că $f = h_1 + \dfrac{3}{4}h_2 - \dfrac{1}{4}h_3$ are primitive pe $\mathbb{R}$.

De asemenea, $g = 2 + h_2$ are primitive pe $\mathbb{R}$. Avem

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \begin{cases} \sin^2\left(\dfrac{1}{x}\right) - 2\sin\left(\dfrac{1}{x}\right) + 4, & x \neq 0 \\ 4, & x = 0 \end{cases} = 4 - 2 \cdot h_2(x) + \begin{cases} \sin^2\left(\dfrac{1}{x}\right), & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}.$$

Atunci $\dfrac{f}{g}$ nu are primitive pe $\mathbb{R}$, deoarece primele două funcții din suma anterioară admit primitive, iar a treia funcție nu admite primitive.

1.24. Propoziție. Fie $J \subset \mathbb{R}$ un interval nedegenerat și $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g : J \to \mathbb{R}$ două funcții având proprietățile:

1) f admite primitive pe $\mathbb{R}$;